**Пример варианта контрольной № 3**

**1.** Решить задачу Коши двумя способами (вариации постоянных и преобразования Лапласа):



***Решение.*** Как известно, общее решение ЛНДУ состоит из суммы общего решения ЛОДУ и какого-либо частного решения ЛНДУ. Сначала ищем общее решение ЛОДУ. Записываем характеристическое уравнение: . Его решения: , . Значит, общее решение ЛОДУ имеет вид: 

*1-й способ* нахождения частного решения ЛНДУ – метод вариации постоянных. Для этого полагаем . Записываем систему уравнений:

Сократим на : 

Из 1-го уравнения: . Или  . Подставляем во второе уравнение: . Или . Откуда . Интегрируя, находим: ;  Имеем частное решение ЛНДУ: *у*ч. Общее решение ЛНДУ:  Значения постоянных определяем из начальных условий: . Имеем , . Откуда следует . Значит, , и решение задачи Коши имеет вид: 

*2-й способ.* Выполняем преобразования Лапласа:  ,  Подставляем в уравнение: . Откуда находим: 

. Выполняем обратное преобразование Лапласа: .

Мы пришли к тому же самому решению.

***Ответ:*** 

**2.** Найти общее рушение уравнения Эйлера:



***Решение*.** Это неоднородное уравнение Эйлера. Сделаем подстановку  (значит, ). Тогда  и исходное уравнение принимает вид:  Это линейное неоднородное уравнение (ЛНДУ) для *y*(*t*). Запишем для него характеристическое уравнение: . Его решения:   Значит, общее решение ЛОДУ для *y*(*t*) имеет вид (см. занятие № 10): . Частное решение *yч*(*t*) с учетом правой части будем искать в виде: *yч*(*t*) . После подстановки в исходное уравнение для *y*(*t*) найдем:  или . Таким образом, общее решение ЛНДУ для *y*(*t*) имеет вид: . Делая обратную замену , окончательно получим решение: .

***Ответ:*** .

**3.** Найти обще решение линейной однородной системы:



***Решение.*** *1-й способ*. Составим характеристическое уравнение . Вычисляя определитель, получим уравнение . Его корни  и  являются ***собственными значениями*** матрицы системы *А*.Найдем ***собственные векторы*** . 1) Подставим в систему , получим . Следовательно, . Для произвольного значения *α*. Возьмем . Получим собственный вектор .

2) Аналогично для  получим систему .

Следовательно,  и собственный вектор .

Значит ***общее решение системы*** будет иметь вид:

 или в координатном виде .

*2-й способ.* Применим метод преобразования Лапласа. 1) Выполняем преобразование Лапласа для обоих уравнений:  Перепишем систему линейных уравнений в более удобном виде: 

2). Решаем эту систему по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид: 

Аналогично находим решение для *Y*:

.

3). Выполняем обратные преобразования Лапласа:   . Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение в координатном виде: , которое совпадают с полученными ранее.

***Ответ:***  или 

***Примечание:*** эту задачу на контрольной можно решать любым из приведенных выше способов и, соответственно, записывать решение в любом из двух видов.

**4.** Найти обще решение линейной неоднородной системы:



***Решение.*** Так как решение соответствующей линейной однородной системы (ЛОС) мы нашли ранее при решении задания 3, остается найти частное решение ЛНС.

Ищем его в виде . Подставив в нашу систему, получаем . Отсюда .

***Общее решение***  .

*2-й способ.* Применим метод преобразования Лапласа. 1). Выполняем преобразование Лапласа для обоих уравнений:

 Перепишем систему в более удобном виде: 

2). Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:   Аналогично для *Y*: 

3). Выполняем обратные преобразования Лапласа: . Аналогично для : . Легко проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение системы в координатном виде: , которое совпадает с полученным ранее.

***Ответ:***  или 

***Примечание:*** эту задачу на контрольной можно решать любым из приведенных выше способов и, соответственно, записывать решение в любом из двух видов.

Еще один пример ЛНС:

4. Найти общее решение ЛНС .

***Решение.*** *1-й способ.*По сравнению с предыдущим заданием, мы изменили только функцию  и теперь  совпадает с корнем характеристического уравнения кратности .

Поэтому частное решение ищем в виде .

Подставляем его в систему .

Получаем .

Приравнивая коэффициенты при равных степенях , получаем систему



Отсюда , .  - произвольное, например, . .

***Общее решение:*** .

*2-й способ.* Применим метод преобразования Лапласа. 1). Выполняем преобразование Лапласа для обоих уравнений:  Перепишем систему в более удобном виде: 

2). Решаем ее по правилу Крамера. Главный определитель системы равен . Решение для *Х* имеет следующий вид:  . Аналогично для *Y*:



3). Выполняем обратные преобразования Лапласа: . Аналогично для : . Легко

, проверить, что начальные условия  и  выполняются. Если ввести обозначения  и , то получим решение системы в координатном виде: , которое совпадает с полученным ранее.

***Примечание:*** эту задачу на контрольной можно решать любым из приведенных выше способов и, соответственно, записывать решение в любом из двух видов.

***.***